Tema 2 – Transformada Z y análisis transformado de sistemas LTI

Carlos Óscar Sánchez Sorzano
4º Ing. Telecomunicación
EPS – Univ. San Pablo – CEU

Bibliografía: Oppenheim I (Cap. 10), Oppenheim II (Cap. 3), Proakis (Cap. 3)

Funciones propias de los sistemas LTI

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]\underset{\substack{\uparrow\\ x[n]=z_0^n}}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}z_0^k h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{n-k}=z_0^n\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{-k}\underset{\substack{\uparrow\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z_0^{-k}=H(z_0)}}{=}z_0^n H(z_0)$$

[0.46]

$$x[n]=\sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

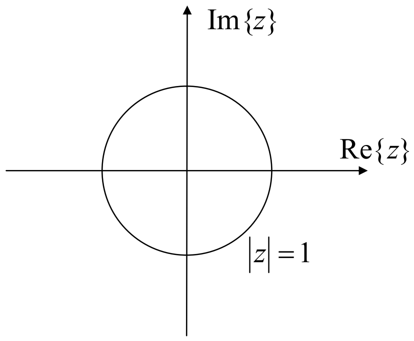
[0.47]

Bibliografía: Oppenheim 2.6

Transformada Z

$$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}}$$

$$z=re^{j\omega}\longrightarrow\quad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]r^{-n}e^{-j\omega n}=TF\{x[n]r^{-n}\}\quad\longrightarrow\quad TF\{x[n]\}=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$



La transformada Z de $x[n]$ converge en z si la transformada de Fourier de $x[n]r^{-n}$ converge, es decir, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]r^{-n}\right|<\infty$

Si converge para z_0 , entonces converge para $\forall z: |z|=|z_0|$. Esto define una región de convergencia (ROC).

La transformada de Fourier converge, si la ROC incluye al círculo unidad.

X(z) y todas sus derivadas son continuas dentro de la ROC.

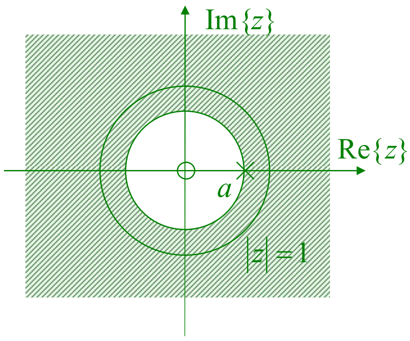
Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1

Transformada Z

Ejemplo:

$x[n] = a^n u[n]$ $\qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Si $\left|az^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$



Se llaman polos a aquellos puntos para los que $X(z) = \infty$.
Se llaman ceros a aquellos puntos para los que $X(z) = 0$.

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1

Transformada Z

Ejemplo:

$x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n'=1}^{\infty} \left(b^{-1}z\right)^{n'} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = -\frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Si $\left|az^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$

Si $\left|b^{-1}z\right| < 1 \Rightarrow |z| < |b|$

Caso 1: $|b| < |a|$ No existe X(z)

Caso 2: $|b| = |a|$ No existe X(z)

Caso 3: $|b| > |a|$ Existe X(z) para $|a| < |z| < |b|$

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1

Ejemplo: Proakis, pp 160

Problemas Opp: 3.1*, 3.2*, 3.24

Problemas Pro: 3.1

Transformada Z

Polos y ceros de una transformada racional

$$X(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{z^{-M}}{z^{-N}}\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}=z^{N-M}\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=0}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

(N-M) ceros ó (M-N) polos en el origen

M ceros fuera del origen
N polos fuera del origen

Bibliografía: Oppenheim II 3.1, Proakis 3.1, Proakis 3.3

Problemas Pro: 3.21

Relación con la TF

- $\left|X(e^{j\omega})\right|^2 = X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) = X(z)X^*(\tfrac{1}{z^*})\Big|_{z=e^{j\omega}}$
- Cuidado con $TF\{x[n]\} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

Ejemplo:

$$x[n] = \tfrac{\omega_c}{\pi}\sin c(\tfrac{\omega_c}{\pi}n) \qquad \neg\exists r : \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| < \infty \quad \Rightarrow \quad \neg\exists X(z)$$

¡pero la TF tiende en sentido L2 a una función periódica discontinua!

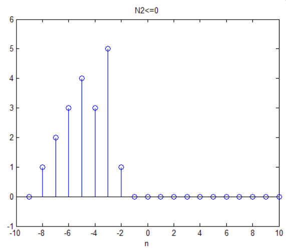
Ejemplo:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n)$$

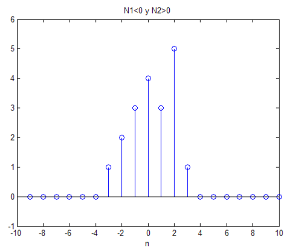
En estos casos no se debe pensar en la TF como la evaluación de la TZ en el círculo unidad.

Propiedades de la ROC

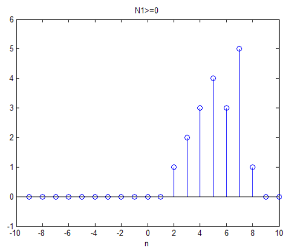
•La ROC se compone de regiones anulares centradas en el origen del plano z.
•La ROC no contiene ningún polo
•Si x[n] es de duración finita entonces la ROC es todo el plano z salvo con posible excepción de z=0 y/o z=∞.



$\{\infty\} \not\subset ROC$



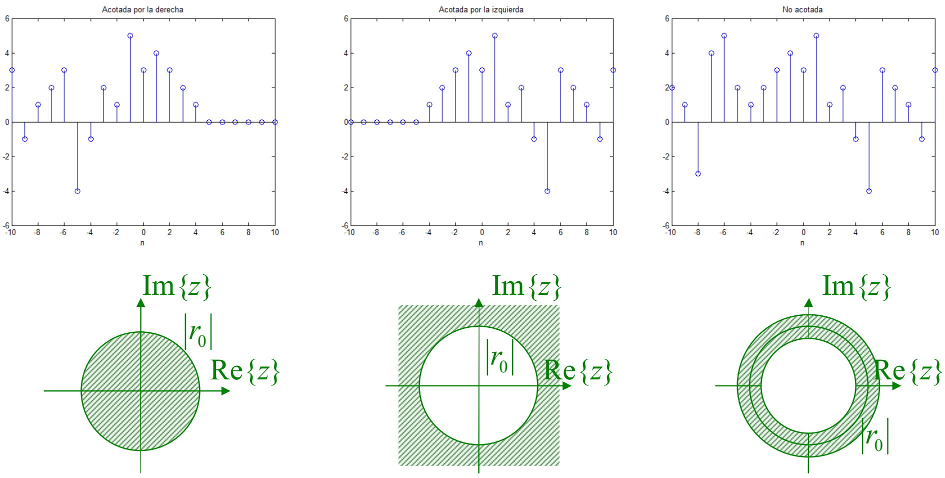
$\{0,\infty\} \not\subset ROC$



$\{0\} \not\subset ROC$

Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Propiedades de la ROC



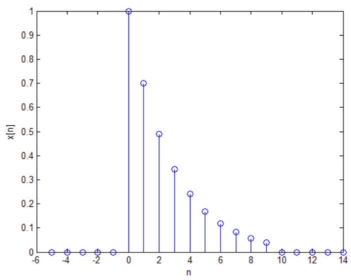
Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

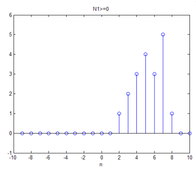
Propiedades de la ROC

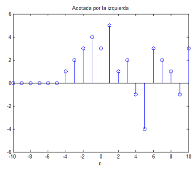
Ejemplo:

$$x[n]=\begin{cases} a^n & 0\le n<N \\ 0 & resto \end{cases}$$

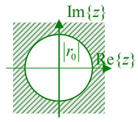
$$X(z)=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\frac{z^{-N}}{z^{-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a}$$

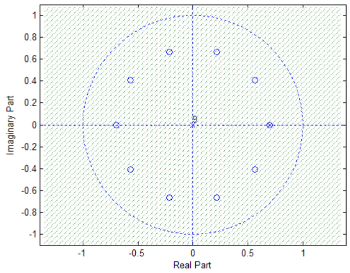






$\{0\}\not\subset ROC$





Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

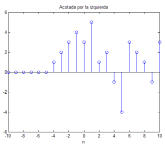
Ejercicio: representar los polos y ceros de una transformada Z

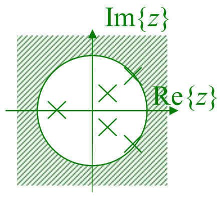
Propiedades de la ROC

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

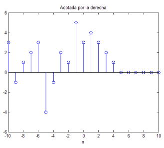
•Si X(z) es racional, entonces su ROC está delimitada por polos o se extiende hasta el infinito.

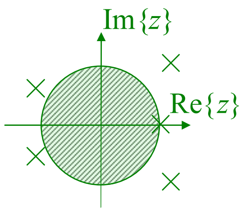
•Si X(z) es racional y x[n] está acotada por la izquierda, entonces la ROC se extiende desde el polo más externo hacia el infinito. Si además x[n] es causal, entonces el infinito está incluido en la ROC.





•Si X(z) es racional y x[n] está acotada por la derecha, entonces la ROC se extiende desde el origen hasta el polo más interno. Si además x[n] es anticausal, entonces el origen está incluido en la ROC.





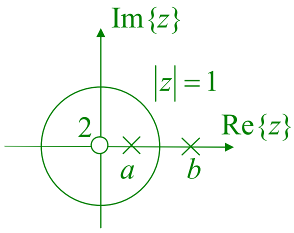
Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

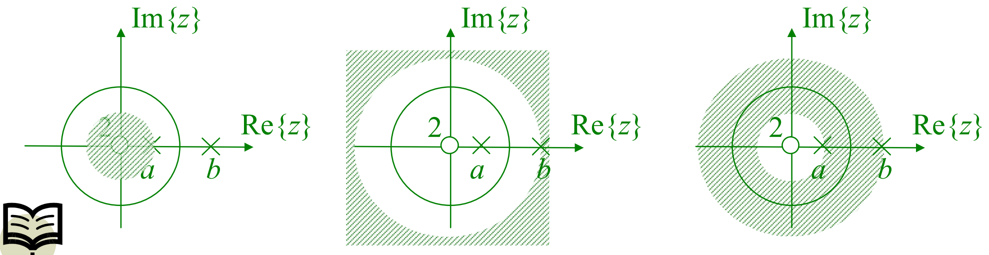
Problemas Opp: 3.8*, 3.10*, 3.11*, 3.46

Propiedades de la ROC

Ejemplo:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - az^{-1}\right)\left(1 - bz^{-1}\right)} \qquad a < 1 < b$$





Esta es la ROC porque es la única para la que la TF converge

Curso 2011/2012 — Carlos Óscar Sánchez Sorzano (EPS-San Pablo CEU) — 12

Bibliografía: Oppenheim 3.2, Proakis 3.1

Ejercicio: realizar la TZ inversa de X(z) con cada una de las ROC

Problemas Opp: 3.4*, 3.12, 3.15, 3.48
Problemas Pro: 3.5, 3.20, 3.44, 3.51, 3.53

Propiedades de la TZ

Linealidad $\quad Ax[n]+By[n] \longleftrightarrow AX(z)+BY(z)$

Al menos $ROC_x \cap ROC_y$

Desplazamiento en el tiempo $\quad x[n-n_0] \longleftrightarrow X(z)z^{-n_0}$

ROC salvo la adición o substracción del origen

Escalado en el dominio z $\quad x[n]e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{-j\omega_0}z)$

TF:Desplazamiento en frecuencia $\quad ROC$

$x[n]z_0^n \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$|z_0|ROC =$
$\{z \in C : z/|z_0| \in ROC\}$

Inversión en el tiempo $\quad x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1})$

ROC^{-1}

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Pro: 3.9

Propiedades de la TZ

Upsampling $\qquad x_m[n]=\begin{cases} x[n/m] & n=mk \\ 0 & resto \end{cases} \longleftrightarrow X(z^m)$

$ROC^{1/m}$

Downsampling $\qquad x_m[n]=x[nm] \longleftrightarrow \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} X(z^{\frac{1}{m}}e^{-j\frac{2\pi k}{m}})$

ROC^m

Conjugación $\qquad x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*)$

ROC

Parte real $\qquad \mathrm{Re}\{x[n]\} \longleftrightarrow \frac{1}{2}(X(z)+X^*(z^*))$

Al menos ROC

Parte imaginaria $\qquad \mathrm{Im}\{x[n]\} \longleftrightarrow \frac{1}{2j}(X(z)-X^*(z^*))$

Al menos ROC

Convolución $\qquad x[n]*y[n] \longleftrightarrow X(z)Y(z)$

Al menos $ROC_x \cap ROC_y$

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Opp: 3.3, 3.7*, 3.9*, 3.16, 3.18, 3.19*, 3.20*, 3.21, 3.22, 3.31, 3.34
Problemas Pro: 3.2, 3.3, 3.4, 3.7*, 3.8, 3.16, 3.27

Propiedades de la TZ

Diferencia finita $\quad x[n]-x[n-1] \longleftrightarrow \left(1-z^{-1}\right)X(z)$

Al menos $ROC \cap \{|z|>0\}$

Integración $\quad \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

Al menos $ROC \cap \{|z|>1\}$

Diferenciación en frecuencia $\quad nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$

ROC

Tma. del valor inicial

Si $x[n]=0, \forall n<0$, entonces $x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$ $\quad \infty \in ROC$

Si $x[n]=0, \forall n>0$, entonces $x[0]=\lim_{z\to 0} X(z)$ $\quad 0 \in ROC$

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

Problemas Opp: 3.37, 3.54

Problemas Pro: 3.6*, 3.10, 3.52, 3.54

Propiedades de la TZ

Correlación $r_{xy}[l] = x[-l] * y[l] \longleftrightarrow X(z^{-1})Y(z)$

Al menos $ROC_x \cap ROC_y$

Multiplicación $x[n]y^*[n] \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(v)Y^*\left(z^*\left(v^*\right)^{-1}\right)v^{-1}dv$

$C \subset ROC_{X(z)} \cap ROC_{Y(z^{-1})}$

Al menos $r_{xl}r_{yl} < |z| < r_{xu}r_{yu}$

Relación de Parseval $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(v)Y^*\left(\left(v^*\right)^{-1}\right)v^{-1}dv$

$C \subset ROC_{X(z)} \cap ROC_{Y(z^{-1})}$

Bibliografía: Proakis 3.2, Oppenheim 3.4

La relación de Parseval sale de la regla de multiplicación particularizada para z=1

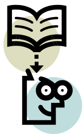
Problemas Opp: 3.17, 3.32, 3.33, 3.40, 3.41, 3.42, 3.47, 3.50, 3.51*

Problemas Pro: 3.13*, 3.18, 3.22, 3.28, 3.30*, 3.35, 3.42, 3.43, 3.49, 3.50

Algunas TZs

$$
\begin{array}{lcll}
a^n u[n] & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-az^{-1}} & |a|<|z| \\[2ex]
-a^n u[-n-1] & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-az^{-1}} & |z|<|a| \\[2ex]
a^{|n|} & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{1-az^{-1}}-\dfrac{1}{1-a^{-1}z^{-1}} & \dfrac{1}{|a|}<|z|<|a| \\[2ex]
na^n u[n] & \longleftrightarrow & \dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} & |a|<|z| \\[2ex]
(n+1)a^n u[n+1] & \longleftrightarrow & \dfrac{1}{\left(1-az^{-1}\right)^2} & |a|<|z| \\[2ex]
-na^n u[-n-1] & \longleftrightarrow & \dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} & |z|<|a| \\[2ex]
\delta[n-n_0] & \longleftrightarrow & z^{-n_0} & \begin{cases} C-\{0\} & n_0>0 \\ C-\{\infty\} & n_0<0 \end{cases}
\end{array}
$$

Bibliografía: Proakis 3.3, Oppenheim 3.1



Algunas TZs

$$r^n(\cos\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad r<|z|$$

$$r^n(\cos(\omega_0 n+\phi))u[n] \longleftrightarrow \frac{\cos\phi-(r\cos(\omega_0-\phi))z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad r<|z|$$

$$r^n(\sin\omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{(r\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad r<|z|$$

$$r^n\left(\frac{\sin\omega_0(n+1)}{\sin\omega_0}\right)u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}} \qquad r<|z|$$

$$a^n(u[n]-u[n-N]) \longleftrightarrow \frac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}} \qquad 0<|z|$$

Bibliografía: Proakis 3.3, Oppenheim 3.1

Transformada Z inversa

- Directa $x[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$

  Integral de línea para alguna circunferencia $z = |z_0| : z_0 \in ROC$ recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj.
- Inspección
- Expansión en fracciones parciales
- Expansión en serie de potencias

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

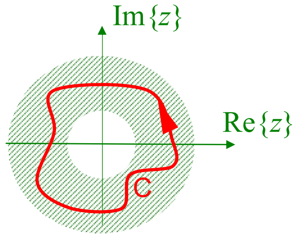
Transformada Z inversa

- Directa

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$\boxed{\oint_C X(z)z^{n-1}dz}=\oint_C\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}\right)z^{n-1}dz\underset{C\subset ROC}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\oint_C z^{n-1-k}dz\underset{\text{Tma. integral de Cauchy}}{=}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]2\pi j\delta[n-k]=$$

$$=\boxed{j2\pi x[n]}$$



$$\frac{1}{j2\pi}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz\underset{\text{Si } f(z_0)\neq\infty}{=}\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}\left.\frac{d^{k-1}f(z)}{dz^{k-1}}\right|_{z_0} & z_0\,dentro\ de\ C\\ 0 & z_0\,fuera\ de\ C\end{cases}$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Multiplico por los dos lados por z^(n-1) e integro en C. C se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj. Como C está en la ROC la suma converge y se puede intercambiar la suma con la integral. Ejercicio: demostrar que la aplicación del teorema integral de Cauchy a la integral dada da una delta.

Transformada Z inversa

- Directa

Suponiendo que todos los polos son distintos

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_C \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i(z)}{z-z_i}\right)dz = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{A_i(z)}{z-z_i}dz = \sum_{i=1}^{N}A_i(z_i)$$

$$A_i(z) = (z-z_i)\frac{f(z)}{g(z)}$$

Residuo del polo i

Suma de los residuos de todos los polos

$$x[n] = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \boxed{\sum_{i=1}^{N}(z-z_i)X(z)z^{n-1}\Big|_{z=z_i}}$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Transformada Z inversa

- Directa

Suponiendo que hay polos de multiplicidad múltiple

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}A_i(z)}{dz^{m_i-1}}\bigg|_{z=z_i}$$

Suma de los residuos de todos los polos

$$A_{ik}(z) = (z-z_i)^k \frac{f(z)}{g(z)}$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(m_i-1)!} \frac{d^{m_i-1}(z-z_i)^{m_i} X(z) z^{n-1}}{dz^{m_i-1}}\bigg|_{z=z_i}}$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Transformada Z inversa

- Directa

Ejemplo: $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow{|a|<|z|} x[n]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz=\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{z^n}{z-a}dz$

Caso 1: $n\geq 0 \Rightarrow \forall z: z^n \neq \infty$

$$A_1(z)=(z-a)\frac{z^n}{z-a}=z^n \longrightarrow x[n]=A_1(z)\big|_{z=a}=a^n$$

Caso 2: $n<0 \Rightarrow z=0: z^n=\infty$ Polo de orden n

$n=-1$

$$\left.\begin{aligned} A_1(z)&=(z-a)\frac{1}{z(z-a)}=\frac{1}{z} \\ A_2(z)&=z\frac{1}{z(z-a)}=\frac{1}{z-a} \end{aligned}\right\} \longrightarrow x[n]=\frac{1}{j2\pi}\oint_C \frac{1}{z(z-a)}dz=\frac{1}{z}\bigg|_{z=a}+\frac{1}{z-a}\bigg|_{z=0}=0$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Transformada Z inversa

- Directa

Ejemplo: $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}} \longrightarrow x[n]=\dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \dfrac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz=\dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \dfrac{z^{n}}{z-a}dz$

<u>Caso 2:</u>

$n=-2$

$$\left.\begin{array}{l} A_1(z)=(z-a)\dfrac{1}{z^2(z-a)}=\dfrac{1}{z^2} \\ A_2(z)=z^2\dfrac{1}{z^2(z-a)}=\dfrac{1}{z-a} \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x[n]=\dfrac{1}{j2\pi}\oint_C \dfrac{1}{z^2(z-a)}dz= \\ =\left.\dfrac{1}{z^2}\right|_{z=a}+\left.\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{z-a}\right)\right|_{z=0}= \\ =\left.\dfrac{1}{z^2}\right|_{z=a}-\left.\dfrac{1}{(z-a)^2}\right|_{z=0}=0 \end{array}$$

Curso 2011/2012 Carlos Óscar Sánchez Sorzano (EPS-San Pablo CEU) 24

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Ejercicio: calcular x[n] para n=-3

Problemas Opp: 3.38, 3.39, 3.57

Problemas Pro: 3.29, 3.56, 3.57, 3.58

Transformada Z inversa

- Inspección

Ejemplo: $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow{|a|<|z|} x[n]=a^n u[n]$

Ejemplo:

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}-z^{-1}}=2\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}-2\frac{1}{2}z^{-1}}= \qquad \tfrac{1}{2}<|z|$$

$$=-\frac{-2\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

$$x[n]=n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.5*, 3.13

Transformada Z inversa

- Expansión en fracciones parciales

Ejemplo:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{K_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{K_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \tfrac{1}{2}<|z|$$

$$K_1=\left((1-\tfrac{1}{4}z^{-1})X(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big|_{z=\frac{1}{4}}=-1$$

$$K_2=\left((1-\tfrac{1}{2}z^{-1})X(z)\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})}\Big|_{z=\frac{1}{2}}=2$$

$$X(z)=-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \tfrac{1}{2}<|z| \longrightarrow x[n]=-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.6*, 3.14*, 3.23, 3.35, 3.36, 3.43*, 3.44, 3.45

Problemas Pro: 3.24, 3.25, 3.26, 3.33, 3.37, 3.38*, 3.39, 3.40*, 3.41, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.55

Transformada Z inversa

- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:

$$X(z)=z^2(1-\tfrac{1}{2}z^{-1})(1+z^{-1})(1-z^{-1})=\ z^2-\tfrac{1}{2}z-1+\tfrac{1}{2}z^{-1} \qquad C-\{0,\infty\}$$

$$x[n]=\delta[n+2]-\tfrac{1}{2}\delta[n+1]-\delta[n]+\tfrac{1}{2}\delta[n-1]$$

Ejemplo:

$$X(z)=\log(1+az^{-1})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a^n z^{-n}}{n} \qquad |a|<|z|$$

$$x[n]=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{a^k}{k}\delta[n-k]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n} & n\geq 1\\ 0 & n\leq 0\end{cases}=(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u[n-1]$$

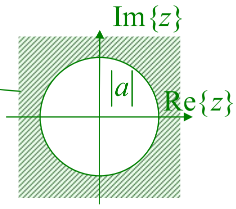
Curso 2011/2012 | Carlos Óscar Sánchez Sorzano (EPS-San Pablo CEU) | 27

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Transformada Z inversa

- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:



$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots$$

Decreciente

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\hline
-1 + az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \ldots \\
\hline
\quad az^{-1} & \\
\quad -az^{-1} + a^2z^{-2} & \\
\hline
\qquad a^2z^{-2} &
\end{array}$$

$$x[n] = \delta[n] + a\delta[n-1] + a^2\delta[n-2] + \ldots = a^n u[n]$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Opp: 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29

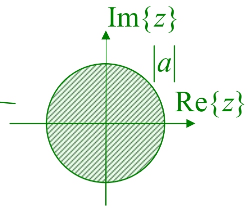
Transformada Z inversa

- Expansión en serie de potencias

Ejemplo:

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}=-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\ldots$$

Creciente



$$\begin{array}{l|l} z & -a+z \\ \underline{-z+a^{-1}z^2} & \overline{-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\ldots} \\ a^{-1}z^2 & \\ \underline{-a^{-1}z^2+a^{-2}z^3} & \\ a^{-2}z^3 & \end{array}$$

$$x[n]=-a^{-1}\delta[n+1]-a^{-2}\delta[n+2]-\ldots=-a^nu[-n-1]$$

Bibliografía: Oppenheim 3.3, Proakis 3.4

Problemas Pro: 3.12, 3.14*, 3.15, 3.19, 3.23

Resumen

- Definición de la Transformada Z
- Relación con la Transformada de Fourier
- Propiedades de la ROC
- Propiedades de la Transformada Z
- Algunas transformadas Z
- Transformada Z inversa:
  - Directa
  - Inspección
  - Expansión en serie de potencias

Problemas Opp: 3.49, 3.52, 3.53, 3.55, 3.56

Problemas Pro: 3.36